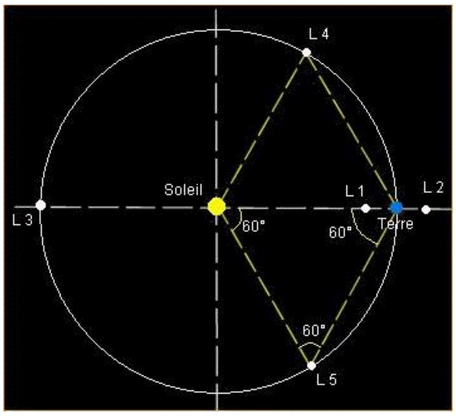
Un calcul simple et élégant permettant une meilleur compréhension de l'existence des points de Lagrange

Ce calcul, portant sur les points de Lagrange L4 et L5, est inspiré de "When Trojans and Greeks Collide" de I. Vorobyov, paru dans la revue *Quantum*, p. 16-19, Sept-Oct. 1999, et a été modifié par les auteurs du site www.phy6.org (voir www.phy6.org/stargaze/Flagrng3.htm).

Nous l'avons à nouveau modifié pour mieux faire ressortir la distinction entre les grandeurs physiques et les outils purement mathématiques de la démonstration.



Les points L4 et L5

Supposons trois corps de masse m_1, m_2 et m_3 orbitant en attraction mutuelle. Ils forment un triangle ABC dont les côtés (R_1, R_2 et R_3) relient les masses entre elles, avec R_1 face à m_1, R_2 face à m_2 et R_3 face à m_3 (figure 1). Nous supposerons que le mouvement s'effectue dans le plan de ce triangle, qui restera plan lui même, puisque seules ces forces y sont présentes.

Est-il possible que les trois masses gardent leurs distances respectives, conservant ainsi la forme du triangle ?

Ce triangle doit pouvoir tourner **autour d'un certain point O**, avec une **période constante T**. Voyons si avec ce type de mouvement, **toutes les forces peuvent rester en équilibre**. Si tel était le cas, il serait donc possible que ces trois masses gardent en effet leurs distances respectives.

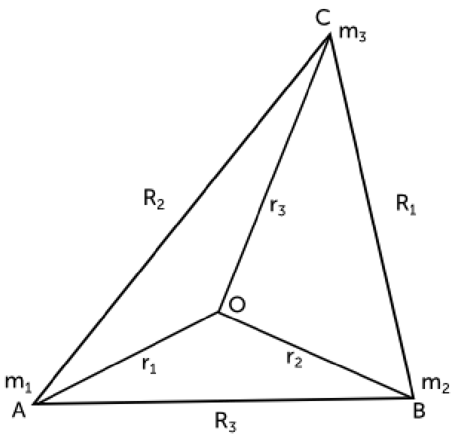


Figure 1

Notons r_1, r_2 et r_3 les distances des trois masses par rapport à O.

Si, **et seulement si**, le triangle est en rotation, nous avons des vitesses tangentielles non nulles (et par conséquent, comme nous le verrons ensuite, des forces centrifuges non nulles).

Les vitesses sont alors :

$v_1 = 2\pi\, r_1/T \qquad v_2 = 2\pi\, r_2/T \qquad v_3 = 2\pi\, r_3/T$

Références dans un cadre en rotation

Tous les calculs se feront dorénavant par **référence avec les masses en rotation.** Dans ce cadre, rigide, en rotation, le triangle ABC reste **fixe et indéformable**, mais chaque masse est néanmoins soumise, en plus des attractions de la gravité, à une **force centrifuge** qui la garde à une distance constante du centre de rotation commun entre les trois objets. Les forces centrifuges, directement orientées selon les axes r_1, r_2 et r_3 sont, selon la loi $f = mv^2/r$:

$m_1v_1^2/r_1 = m_1\ (2\pi/T)^2r_1$ $\qquad$ $m_2v_2^2/r_2 = m_2\ (2\pi/T)^2r_2$ $\qquad$ $m_3v_3^2/r_3 = m_3\ (2\pi/T)^2r_3$

Ces trois forces, dirigées vers **l'extérieur de O** le long de r_1, r_2 et r_3, doivent être incluses dans tout calcul de mouvement en référence tournante. Dans ce type de référence, il faut généralement compter avec les **forces de Coriolis**. Mais comme ces forces n'agissent que sur des objets qui se **déplacent** dans le cadre en rotation, et puisque qu'ici les masses sont fixées aux angles A, B et C, elles sont nulles et **il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte**.

Les forces considérées comme des vecteurs

Il est maintenant utile de présenter les forces en action comme des vecteurs (qui seront dorénavant notés en gras), dont nous ne connaissons pour l'instant que la direction et pas la longueur.

L'attraction gravitationnelle sur la masse m_1 de la part de la masse m_2 sera notée $\mathbf{F}_{12}$, et celle sur la masse m_2 de la part de la masse m_1 par $\mathbf{F}_{21}$. Les forces centrifuges sur les trois corps seront notées $\mathbf{F}_{c1}$, $\mathbf{F}_{c2}$, et $\mathbf{F}_{c3}$. (Voir figure 3, où nous avons dessiné les vecteurs agissant sur le corps 1.)

Si, dans cette référence en rotation, les masses sont équilibrées, la somme des forces, gravitationnelles et centrifuges, exercées sur chacune d'entre elles reste égale à zéro :

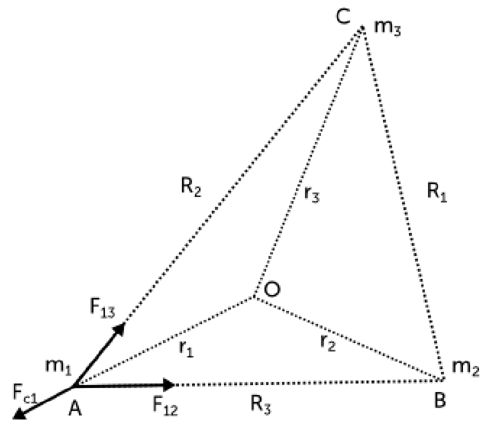


Figure 3

$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{c1} = 0$
$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{c2} = 0$
$\mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{c3} = 0$

On a vu que les forces centrifuges valent :

$\mathbf{F}_{c1} = m_1(2\pi/T)^2\mathbf{r_1}$ $\qquad$ $\mathbf{F}_{c2} = m_2(2\pi/T)^2\mathbf{r_2}$ $\qquad$ $\mathbf{F}_{c3} = m_3(2\pi/T)^2\mathbf{r_3}$

En additionnant les trois premières équations et en remplaçant les valeurs des trois forces centrifuges :

$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{31} + (2\pi)^2\ [m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} + m_3\mathbf{r_3}] = 0$

Avec, selon la 3ème loi de Newton :

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ $\qquad$ $\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}$ $\qquad$ $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$

Et donc, la somme des 6 forces de la gravité étant égale à zéro, il reste :

$(2\pi)^2\ [m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} + m_3\mathbf{r_3}] = 0$

ou

$[m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} + m_3\mathbf{r_3}] = 0$

Ce qui signifie que la combinaison des grandeurs et directions des trois vecteurs doit être égale à 0, c'est-à-dire ramener vers le point de départ d'où sont issus les trois vecteurs, un point fixe donc qui ne peut être que le centre de gravité commun des trois corps.

Relations vectorielles à utiliser

Examinons maintenant r_1 ainsi que les côtés (R_2, R_3) du triangle en les considérant comme des vecteurs ($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$), tous trois dirigés vers m_1 (figure 4). En additionnant bout à bout les vecteurs, on obtient les trois relations vectorielles suivantes :

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_3$
$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_2$

Sans oublier, évidemment,

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1$

Essayons maintenant de déterminer la longueur réelle des vecteurs à l'œuvre. Multiplions les trois relations de l'encadré par les masses des corps : la première par m_2, la deuxième par m_3 et la troisième par m_1, puis additionnons-les :

$\mathbf{r}_1 (m_2 + m_3 + m_1) = [m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + m_1\mathbf{r}_1] + m_3\mathbf{R}_2 + m_2\mathbf{R}_3$

Mais, comme on l'a vu, le terme entre crochet, à droite, est globalement égal à zéro. Puis, si on note M l'ensemble des masses :

$(m_1 + m_2 + m_3) = M$

Il reste :

$\mathbf{r}_1 M = m_3\mathbf{R}_2 + m_2\mathbf{R}_3$

En divisant par M, nous obtenons :

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2(m_3/M) + \mathbf{R}_3(m_2/M)$

Nous nous concentrons maintenant (figure 5), sans que l'on connaisse leur longueur réelle pour l'instant, sur les deux vecteurs représentant la portion relative de la force gravitationnelle, par rapport à la force gravitationnelle **totale** (d'où le rapport des masses m_2 et m_3 par rapport à M), exercée par chacune des deux autres masses sur le corps 1 :

$\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{R}_2 (m_3/M)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\rho}_3 = \mathbf{R}_3 (m_2/M)$

ayant respectivement les directions ($\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$).

L'équation précédente se simplifie en :

$\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3$

ou bien :

$\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_3 = 0$

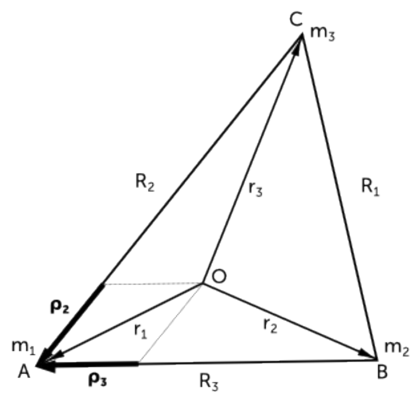


Figure 5

Graphiquement, ce dernier résultat indique que la force gravitationnelle qui s'exerce depuis centre de gravité commun O sur le corps 1 est un réalité composée des deux forces gravitationnelles partielles $\boldsymbol{\rho}_2$ et $\boldsymbol{\rho}_3$.

Et, maintenant, voici « la clé » !

Les trois forces s'exerçant sur la masse m_1 – soit, $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{13}$ et $\mathbf{F}_{c1}$ – sont en équilibre. Leur somme vectorielle est donc égale à zéro. Donc, si nous les réunissons bout à bout, elles **forment un triangle fermé.**

Les vecteurs $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{13}$ et $\mathbf{F}_{c1}$ étant parallèles à ($\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{r}_1$), et donc à ($\boldsymbol{\rho}_3$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\mathbf{r}_1$), le triangle formé des vecteurs $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{13}$ et $\mathbf{F}_{c1}$ est semblable à celui formé des vecteurs $\boldsymbol{\rho}_3$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\mathbf{r}_1$.

Les rapports des côtés des deux triangles sont donc égaux entre eux, et en particulier :

$\mathbf{F_{12}/F_{13} = \boldsymbol{\rho}_3/\boldsymbol{\rho}_2}$

Eliminons les fractions, en multipliant les deux côtés par ($F_{13}\rho_2$), et on obtient :

$\mathbf{F_{12}\, \boldsymbol{\rho}_2 = F_{13}\, \boldsymbol{\rho}_3}$

Plus haut, il a été dit que :

$\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{R}_2\,(m_3/M)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\rho}_3 = \mathbf{R}_3\,(m_2/M)$

Par ailleurs, selon les lois de l'attraction universelle de Newton, avec G la « Constante de Gravitation » :

$\mathbf{F}_{12} = G\, m_1 m_2/R_3^2$
$\mathbf{F}_{13} = G\, m_1 m_3/R_2^2$

Insérez ces derniers dans l'équation $\mathbf{F_{12}\, \boldsymbol{\rho}_2 = F_{13}\, \boldsymbol{\rho}_3}$:

$[G\, m_1 m_2 m_3/M]\, R_2/R_3^2 = [G\, m_1 m_2 m_3/M]\, R_3/R_2^2$

Divisons les deux côtés par les termes entre crochets :

$R_2/R_3^2 = R_3/R_2^2$

Et, en éliminant les fractions en multipliant les deux côtés par $R_2^2 R_3^2$, on obtient finalement :

$R_3^3 = R_2^3$

ce qui implique :

$R_3 = R_2$

Nous aurions pu faire le même calcul avec la masse m2, concernée par les côtés R_1 et R_3, ce qui aurait donné $R_1 = R_3$. Il suit que les côtés du ABC de triangle doivent être égaux entre eux :

$R_1 = R_2 = R_3$

Ainsi l'équilibre n'est possible que si le triangle formé par les trois corps est une triangle équilatéral. Précisons également que cela n'implique en rien que r_1, r_2 et r_3 soient égaux entre eux, ce qui signifie que le centre de gravité commun des trois corps, en particulier s'ils ne sont pas de masse identique, n'est pas situé au centre géométrique du triangle ABC.